МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОБРАБОТКА
АСТРОИНФОРМАЦИИ

КИНЕМАТИКА
И ФИЗИКА
НЕБЕСНЫХ
ТЕЛ том 12 № 4 1996

УДК 520.88

О сглаживании методом Уиттекера

З. М. Малкин

Институт прикладной астрономии РАН
197042, Россия, Санкт-Петербург, ул. Ждановская 8

Приводится сравнительный анализ трех алгоритмов сглаживания методом Уиттекера: оригинального алгоритма Уиттекера и алгоритмов Ю. Г. Юсупова и Я. Вондрака. Показано, что все алгоритмы приводят к рабочим формулам одинаковой структуры, отличающимся нормировочным коэффициентом при аргументах сглаживаемого ряда. Предложена модификация метода Юсупова для обеспечения соответствия другим алгоритмам при равноотстоящих значениях аргумента. Рассмотрена возможность улучшения разделения частот в фильтре, реализуемом методом Уиттекера путем увеличения порядка разностей. Предлагаются формулы для определения крутизны частотной характеристики и нахождения параметра сглаживания для желаемой частоты отсечения.

ПРО ЗГЛАДЖУВАННЯ МЕТОДОМ УЇТТЕКЕРА, Малкін З. М. — Приводиться порівняльний аналіз трьох алгоритмів згладжування методом Уїттекера: оригінального алгоритму Уїттекера, алгоритмів Ю. Г. Юсупова і Я. Вондрака. Показано, що всі алгоритми приводять до робочих формул однакової структури, які відрізняються нормувальним коефіцієнтом при аргументах згладжуваного ряду. Запропонована модифікація методу Юсупова для забезпечення відповідності іншим алгоритмам при рівновіддалених значеннях аргументу. Розглянуто можливість поліпшення розділення частот у фільтрі, що реалізується методом Уїттекера шляхом збільшення порядку різниць. Пропонуються формули для визначення крутизни частотної характеристики і параметра згладжування для бажаної частоти відсічки.

ON THE SMOOTHING BY WHITTAKER'S METHOD, by Malkin Z. M. — A comparative analysis is presented of three smoothing algorithms (by Whittaker's method) of the original algorithm of Whittaker, as well as ones of Yusupov and Vondrak. It is shown that these algorithms lead to the formulae having the same structure and differing by normalizing coefficient in the arguments of an smoothing series. A modification of the Yusupov's method is proposed to provide the conformity with other algorithms for equidistant values of the argument. The Yusupov's algorithm has some practical advantage, because it is insensitive to the series density and the argument dimension. We consider the possibility to improve the frequency separation in the Whittaker's filter by increase of an order of differences. The formulae are given to

determine the steepness of a frequency characteristic and find the smoothing parameter for a cutting frequency needed.

Введение. Сглаживание (фильтрация) наблюдательных данных является одной из основных операций при обработке временны́х рядов. При сглаживании мы, как правило, ставим перед собой две цели:

а) отделение полезного сигнала от случайных помех,

б) выделение из наблюдаемого ряда сигнала в определенной полосе частот.

Если исследователь хочет решить первую задачу, он должен воспользоваться одной из процедур оптимальной фильтрации, которые в настоящей работе не рассматриваются.

Обычно на практике целью фильтрации является исключение из наблюденных значений высокочастотной составляющей, содержащей как случайные помехи, так и высокочастотную, как правило нестабильную, составляющую полезного сигнала для дальнейшего изучения относительно стабильных низкочастотных компонентов изучаемого ряда. При этом, как и при решении многих других задач фильтрации экспериментальных данных, к применяемому фильтру предъявляются следующие требования:

а) возможность регулирования частотной характеристики;

б) максимально возможная крутизна частотной характеристики;

в) отсутствие паразитных окон пропускания.

Из применяющихся в астрономической практике способов сглаживания этим критериям отвечают метод Уиттекера и метод экспоненциального сглаживания. Первый из них имеет преимущество по крутизне частотной характеристики, второй более удобен в некоторых специальных случаях. Настоящая работа посвящена рассмотрению некоторых особенностей применению метода Уиттекера.

Сравнение алгоритмов метода Уиттекера. Метод Уиттекера [6] для нахождения сглаженных значений временно́го ряда требует минимизации функционала

$$Q = \varepsilon F + S, \tag{1}$$

где ε — параметр сглаживания, $F = \sum p_i(y_i - y_i^*)^2$, $S = \sum(\Delta^3 y_i)^2$, y_i — наблюденные значения временно́го ряда, p_i — их веса, $\Delta^3 y_i$ — их третьи разности, y_i^* — сглаженные значения. Приведенные выражения для F и S соответствуют временно́му ряду с равноотстоящими значениями аргумента.

В соответствии с рекомендацией [6] Ю. Г. Юсупов предложил алгоритм сглаживания рядов с неравноотстоящими аргументами [2]. В этом алгоритме $\Delta^3 y_i$ — разделенные разности наблюденных значений.

Я. Вондрак предложил другой алгоритм сглаживания рядов с неравноотстоящими аргументами [4]. В его алгоритме $S = \int_{t_1}^{t_n} [\varphi'''(t)]^2 dt$, где t_1 и t_n — аргументы первой и последней точек ряда, $\varphi'''(t)$ — третья производная функции временного ряда. Позже он предложил уточненный алгоритм [5] с целью обеспечения независимости степени сглаживания от длины и числа точек ряда. В этом случае

$$F = (n-3)^{-1} \sum p_i(y_i - y_i^*)^2,$$

$$S = (t_n - t_1)^{-1} \int_{t_1}^{t_n} [\varphi(t)]^2 dt.$$

Не рассматривая здесь особенностей теоретического обоснования различных алгоритмов сглаживания методом Уиттекера, проведем их сравнение при практическом использовании.

Минимизация функционала (1) приводит к системе линейных уравнений для нахождения сглаженных значений временнóго ряда. Каждое уравнение системы, кроме трех первых и трех последних, имеет вид

$$\varepsilon p_i y_i = A_{i-3} y^*_{i-3} + A_{i-2} y^*_{i-2} + A_{i-1} y^*_{i-1} + (A_i + \varepsilon p_i) y^*_i +$$

$$+ A_{i+1} y^*_{i+1} + A_{i+2} y^*_{i+2} + A_{i+3} y^*_{i+3} \tag{2}$$

Для равноотстоящих значений аргумента (оригинальный алгоритм Уиттекера) имеем

$$A_{i-3} = A_{i+3} = -1, \; A_{i-2} = A_{i+2} = 6, \; A_{i-1} = A_{i+1} = -15, \; A_i = 20. \tag{3}$$

Для неравноотстоящих значений аргумента (алгоритмы Юсупова и Вондрака) можно записать

$$\begin{aligned}
A_{i-1} &= a_{i-3} d_{i-3}, \\
A_{i-2} &= a_{i-2} c_{i-2} + b_{i-3} d_{i-3}, \\
A_{i-1} &= a_{i-1} b_{i-1} + b_{i-2} c_{i-2} + c_{i-3} d_{i-3}, \\
A_i &= a_i^2 + b_i^2 + c_i^2 + d_i^2, \\
A_{i+1} &= a_i b_i + b_{i-1} c_{i-1} + c_{i-2} d_{i-2}, \\
A_{i+2} &= a_i c_i + b_{i-1} d_{i-1}, \\
A_{i+3} &= a_i d_i.
\end{aligned} \tag{4}$$

Коэффициенты (4) имеют вид

$$\begin{aligned}
a_j &= \frac{K}{(t_j - t_{j+1})(t_j - t_{j+2})(t_j - t_{j+3})}, \\
b_j &= \frac{K}{(t_{j+1} - t_j)(t_{j+1} - t_{j+2})(t_{j+1} - t_{j+3})}, \\
c_j &= \frac{K}{(t_{j+2} - t_j)(t_{j+2} - t_{j+1})(t_{j+2} - t_{j+3})}, \\
d_j &= \frac{K}{(t_{j+3} - t_j)(t_{j+3} - t_{j+1})(t_{j+3} - t_{j+2})}.
\end{aligned} \tag{5}$$

Фактически единственное различие рабочих формул для рассматриваемых алгоритмов состоит в значении коэффициента K, которое равно

— согласно Юсупову [2]

$$K = T^3, \tag{6}$$

где $T = \dfrac{t_n - t_1}{n - 1}$ — средний интервал между точками ряда;

— согласно Вондраку [4]

$$K = 6\sqrt{t_{j+2} - t_{j+1}}\,; \tag{7}$$

— согласно Вондраку [5]

$$K = \frac{6\sqrt{t_{j+2} - t_{j+1}}}{\sqrt{t_n - t_1}}\,; \tag{8}$$

Сопоставляя приведенные алгоритмы для равноотстоящего ряда, получим соотношение параметров ε в рассматриваемых алгоритмах для достижения одинаковой степени сглаживания (учитывая коэффициент $n — 3$ в алгоритме Вондрака [5]):

$$\varepsilon_1 = 36\varepsilon_2 = \varepsilon_3 T^{\,5} = \varepsilon_4 \frac{n-1}{n-3} T^{\,6}, \tag{9}$$

где ε_1 — параметр сглаживания для алгоритма Уиттекера, ε_2 — параметр сглаживания для алгоритма Юсупова, ε_3 — параметр сглаживания для алгоритма Вондрака [4], ε_4 — параметр сглаживания для алгоритма Вондрака [5]. При таком соотношении параметров сглаживания результаты для равноотстоящего ряда полностью индентичны. Рассмотрение соотношения (9) показывает, что в алгоритме Юсупова целесообразно положить $K = 6T^3$ для установления соответствия с алгоритмом Уиттекера для равноотстоящих значений аргумента. В этом случае для достижения одинаковой степени сглаживания получим

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 T^{\,5} = \varepsilon_4 \frac{n-1}{n-3} T^{\,6}. \tag{10}$$

Как видно из (10), благодаря нормировке к среднему значению интервала между точками ряда, алгоритм Юсупова нечувствителен к изменению размерности аргумента, тогда как алгоритм Вондрака требует для сохранения степени сглаживания изменения ε при изменении размерности t, что представляет некоторые неудобства и может служить причиной недоразумений при сравнении исследований различных авторов. Этот эффект отмечал и сам Вондрак [5].

С другой стороны, отмеченное расхождение между алгоритмами Юсупова и Вондрака должно приводить к различиям результатов сглаживания для рядов с очень неравномерно расположенными аргументами или с большими пропусками. Этот вопрос нуждается в подробном изучении, хотя на практике такие ряды встречаются не часто.

Частотная характеристика метода Уиттекера. Отметим еще одну особенность метода Уиттекера. Предложенный в [6] и развитый в [2, 4, 5] метод сглаживания основан на произвольно выбранном критерии меры гладкости сглаженной кривой как суммы квадратов третьих разностей. В [3] рассмотрена частотная характеристика метода Уиттекера для разностей произвольных порядков. Соответствующее выражение для частотной характеристики при применении порядка разностей k и параметра сглаживания ε следующее:

$$H(f, \varepsilon, k) = \frac{1}{1 + \varepsilon^{-1}(2\pi f)^{2k}}\,. \tag{11}$$

Анализ (11) показывает, что с увеличением k увеличивается крутизна частотной характеристики сглаживающего фильтра, что позволяет лучше выделять из исследуемого ряда сигнал в заданной полосе частот. Рассмотрим производную $\dfrac{\partial H}{\partial f}$ на частоте f_0, соответствующей максимальной крутизне частотной характеристики. Значение f_0 найдем как значение, соответствующее экстремуму производной:

$$f_0 = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{(2k-1)\,\varepsilon}{2k+1}\right]^{\frac{1}{2k}} \approx \frac{\varepsilon^{\frac{1}{2k}}}{2\pi}\,. \tag{12}$$

Последнее (приближенное) значение f_0 в (12) соответствует $\dfrac{\partial H}{\partial f} = 0.5$. Подставив приближенное значение f_0 в $\dfrac{\partial H}{\partial f}$, найдем крутизну частотной характеристики (т. е. экстремум производной) на частоте f_0, которую назовем частотой отсечения:

$$\frac{\partial H}{\partial f}(f_0) = -\pi k \varepsilon^{-\frac{1}{2k}} \tag{13}$$

Последнее выражение показывает, что, увеличивая порядок разностей, можно добиться резкого увеличения крутизны частотной характеристики.

На основе (12) легко решить и обратную задачу — нахождения необходимого значения параметра сглаживания ε_0, исходя из заданной частоты отсечения:

$$\varepsilon_0 = (2\pi f_0)^{2k} \frac{2k-1}{2k+1} \approx (2\pi f_0)^{2k} \tag{14}$$

Заключение. Различные алгоритмы практического использования метода сглаживания экспериментальных данных, предложенного Уиттекера, допускают унифицированную формулировку, что позволяет легко их сравнивать. На основе сопоставления алгоритмов, развитых Ю. Г. Юсуповым (включая модификацию, предложенную в настоящей статье) и Вондраком, приведены соотношения параметров сглаживания, при применении которых к сглаживанию равноотстоящих (не обязательно равновесных) рядов получаются одинаковые результаты. При этом первый из указанных алгоритмов имеет определенное практическое преимущество, поскольку он нечувствителен к размерности аргумента. Это избавляет исследователя от необходимости учитывать зависимость степени сглаживания от длины и плотности ряда и от размерности его аргумента. С другой стороны целесообразно учесть зависимость степени сглаживания от числа точек ряда способом, аналогичным предложенному в [5].

Однако вопрос о влиянии выбора алгоритма на результат сглаживания рядов с очень неравномерно расположенными аргументами или с большими пропусками нуждается в подробном изучении. Некоторые предварительные результаты, представленные в [1], показывают, что и этом случае алгоритм Юсупова, по-видимому, более устойчив.

Исследование частотной характеристики метода Уиттекера показывает, что, изменяя порядок примененных разностей, можно в широких пределах регулировать ее крутизну, добиваясь, вообще говоря, сколь угодно хорошего разделения частот. При этом величина параметра сглаживания, соответствующая заданной величине крутизны частотной характеристики, и желаемая частота отсечения могут быть найдены по простым формулам, предложенным в настоящей работе.

1. *Малкин З. М., Русинов Ю. Л.* Сравнение различных алгоритмов сглаживания методом Уиттекера // Российская астрометрическая конференция. — Пулково, 1993.
2. *Юсупов Ю. Г.* Сглаживание широтного ряда АОЭ 1957—1965 гг. // Изв. АОЭ.—1968.—№ 36.—С. 229—239.
3. *Huang Kun-yi, Zhou Xiong.* An essentiality of the Whittaker—Vondrak method as a filter, and estimation of standard deviation and correlation for digital filter // Acta Astron. Sinica.—1981.—**22**, N 2.—P. 120—130.
4. *Vondrak J.* A contribution to the problem of smoothing observation data // Bull. Astron. Inst. Czechosl.—1969.—**20**, N 6.—P. 349—354.
5. *Vondrak J.* Problem of smoothing observational data II // Bull. Astron. Inst. Czechosl.—1977.—**28**, N 2.—P. 84—89.
6. *Whittaker E. T., Robinson G.* The calculus of observations. — London: Blackie and Son Ltd, 1926.—580 p.

Поступила в редакцию 20.10.95